ENSAIT

Ecole Nationale Supérieure des Arts et Industries Textiles

**CONCOURS D'ENTREE 1996**

**Epreuve de MATHEMATIQUES II**

Durée 2 heures

(tous les candidats)

Les théorèmes seront énoncés avec rigueur

Aucun résultat ne sera pris en compte s'il n'est accompagné de calculs intermédiaires

Les copies illisibles ou mal présentées seront pénalisées

**L'usage des calculatrices est interdit.**

On note $\alpha$ un réel quelconque, et $n$ un entier naturel non nul.

On note $\Re_n[x]$ l'espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à $n$.

Selon l'usage courant on confond polynôme et fonction polynômiale.

On rappelle qu'un polynôme normalisé de $\Re_n[x]$ est un polynôme dont le coefficient du terme dominant est égal à *1*.

On appelle polynôme propre d'un endomorphisme de $\Re_n[x]$, un polynôme qui est vecteur propre de l'endomorphisme.

On note $f$ et g les applications qui, à tout polynôme $P$, associent respectivement les polynômes :

$$f(P) = (x^2 - 1)P' + (\alpha - nx)P$$

$$g(P) = P(1).(x-1)^n$$

1°) Montrer que $f$ et $g$ sont 2 endomorphismes de $\Re_n[x]$.

2°) On prend ici $n = 2$, on munit $\Re_2[x]$ de sa base canonique $\{1, x, x^2\}$ .

a) Quelles sont les matrices de $f$ et $g$ dans cette base ?

b) Montrer que $f$ est diagonalisable, donner une base de polynômes propres normalisés de $f$.

c) Montrer que $g$ n'est pas diagonalisable, déterminer une base de polynômes normalisés de $\Re_2[x]$ dans laquelle la matrice de $g$ est égale à $T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

**On suppose dorénavant $n$ quelconque dans $N^*$**

3°) a) Intégrer, sur $]-1,+1[$, l'équation différentielle :

$$(x^2-1)y'+(\alpha - nx - \lambda)y = 0$$

b) En déduire les valeurs propres et les polynômes propres de $f$.

c) Donner une base de polynômes normalisés de $\Re_n[x]$ qui diagonalise $f$.
Donner la matrice de $f$ dans cette base.

4°) Déterminer les valeurs propres et polynômes propres de $g$.

Est-ce que $g$ est diagonalisable ?

5°) Peut-on déterminer $\alpha$ tel que $g \circ f$ soit l'application nulle de $\Re_n[x]$ ?
Que vaut alors $f \circ g$ ?

6°) $n$ est toujours un entier naturel quelconque non nul, à tous polynômes $P$ et $Q$ de $\Re_n[x]$ on associe

$$\varphi(P,Q) = \int_{+1}^{+\infty} \left(\frac{x-1}{x+1}\right)^{\alpha} \cdot \frac{P(x)Q(x)}{(x^2-1)^{n+1}} dx$$

a) A quelle condition sur $\alpha$, cette intégrale généralisée a-t-elle un sens pour tout choix des polynômes $P et Q$ de $\Re_n[x]$ ?

On supposera par la suite cette condition vérifiée.

b) Montrer que $\varphi$ est alors un produit scalaire sur $\Re_n[x]$, on notera $\varphi(P,Q) = \langle P,Q \rangle$.

c) Soient $P$ et $Q$ des polynômes de $\Re_n[x]$ tels que $d^\circ(P.Q)$ inférieur strictement à $2n$, montrer alors que $\langle f(P),Q\rangle + \langle P,f(Q)\rangle = 0$.

d) Que vaut $\langle f(P),Q\rangle + \langle P,f(Q)\rangle$ lorsque $d^\circ(P.Q) = 2n$ ?
En déduire que la base de polynômes propres qui diagonalise f (voir 3°c) n'est pas orthogonale pour ce produit scalaire.